انتگرال[۴]
بخش ۴

[۴] Sh. Nosrati, 13961208 update 14000503 ES0.

$$
\begin{aligned}
I_{۱۶} &= \int \frac{۱ - \cos ۲x}{۱ + \cos ۲x}\,\mathrm{dx} \\
&= \int \frac{۲\sin^{۲} x}{۲\cos^{۲} x}\,\mathrm{dx} \quad ; \quad \begin{cases} ۱ - \cos ۲x = ۲\sin^{۲} x \\ ۱ + \cos ۲x = ۲\cos^{۲} x \end{cases} \\
&= \int \tan^{۲} x\,\mathrm{dx} \\
&= \int ۱ + \tan^{۲} x - ۱\,\mathrm{dx} \\
&= \tan x - x + C
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
I_{۱۷} &= \int \frac{x-۱}{x^{۲}+۱}\,\mathrm{dx} \\
&= \int \frac{x}{x^{۲}+۱}\,\mathrm{dx} - \int \frac{۱}{x^{۲}+۱}\,\mathrm{dx} \\
&= \frac{۱}{۲}\ln(x^{۲}+۱) - \arctan x + C
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
I_{۱۸} &= \int \frac{x^{۲}-۱}{x^{۲}+۱}\,\mathrm{dx} \\
&= \int ۱ - ۲\frac{۱}{x^{۲}+۱}\,\mathrm{dx} \\
&= x - ۲\arctan x + C
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
I_{۱۹} &= \int \frac{x^{۳}-۱}{x^{۲}+۱}\,\mathrm{dx} \\
&= \int x - \frac{x}{x^{۲}+۱} - \frac{۱}{x^{۲}+۱}\,\mathrm{dx} \\
&= \frac{۱}{۲}x^{۲} - \frac{۱}{۲}\ln(x^{۲}+۱) - \arctan x + C
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
I_{۲۰} &= \int \frac{x}{x^{۲}-۱}\,\mathrm{dx} \\
&= \frac{۱}{۲}\ln(x^{۲}-۱)+C
\end{aligned}
$$

بخشی از انتگرال های کسری به جوابی لگاریتمی ختم می شوند. در این نوع انتگرالها مشتق مخرج در صورت کسر انتگراند موجود است

$$
\begin{aligned}
I_{۲۱} &= \int \tan x\,\mathrm{dx} \\
&= -\int \frac{-\sin x}{\cos x}\,\mathrm{dx} \\
&= -\ln\cos x + C
\end{aligned}
$$

$$I_{۲۲} = \int \frac{x^{۴}}{x^{۵} + ۶}\,\mathrm{dx}$$
$$= \frac{۱}{۵}\ln(x^{۵} + ۶) + C$$

انتگرال سکانت را می توان به انتگرال لگاریتمی بدل نمود.

$$\begin{aligned} I_{۲۳} &= \int \sec x \,\mathrm{dx} \\ &= \int \frac{\sec x(\sec x + \tan x)}{(\sec x + \tan x)} \,\mathrm{dx} \\ &= \int \frac{\sec x \tan x + \sec^{۲} x}{\sec x + \tan x} \,\mathrm{dx} \\ &= \ln(\sec x + \tan x) + C \end{aligned}$$

انتگرال کسکانت را می توان به انتگرال سکانت تبدیل کرد.

$$
\begin{aligned}
I_{۲۴} &= \int \csc x \, \mathrm{dx} \\
&= -\int \sec u \; \mathrm{du} \quad ; \quad x = \frac{\pi}{۲} - u \implies \mathrm{dx} = -\,\mathrm{du} \\
&= -\ln(\sec u + \tan u) + C \\
&= -\ln \frac{۱ + \cos x}{\sin x} + C \\
&= -\ln \cot \frac{x}{۲} + C \\
&= \ln \tan \frac{x}{۲} + C
\end{aligned}
$$

انتگرال کسکانت به طور سرراست.

$$
\begin{aligned}
I_{۲۵} &= \int \csc x \,\mathrm{dx} \\
&= \int \frac{۱}{\sin x} \,\mathrm{dx} \\
&= \int \frac{۱}{۲ \sin \frac{x}{۲} \cos \frac{x}{۲}} \,\mathrm{dx} \\
&= \int \frac{\frac{۱}{۲} \frac{۱}{\cos^{۲} \frac{x}{۲}}}{\frac{\sin \frac{x}{۲}}{\cos \frac{x}{۲}}} \,\mathrm{dx} \\
&= \int \frac{\frac{۱}{۲} \left(۱ + \tan^{۲} \frac{x}{۲} \right)}{\tan \frac{x}{۲}} \,\mathrm{dx} \\
&= \ln \tan \frac{x}{۲} + C
\end{aligned}
$$